Câu 1

Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, cho D là nửa trên của *hình tròn* tâm O bán kính 2 và E là đồ thị của hàm số $y = 1 - x^2$ trong D.

(a) Chứng tỏ miền D có diện tích trong $\mathbb{R}^2$.

(b) Chứng tỏ hàm $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \pi, & \text{nếu } (x, y) \in E, \\ -\pi, & \text{nếu } (x, y) \in D \backslash E \end{cases}$$

là khả tích trên D. Tính $\int_D f$.

Trả lời

(a) Biên của D bao gồm đồ thị E của hàm số $y = 1 - x^2$ và đoạn thẳng $[-2, 2]$ trên trục Ox. Hàm số $y = 2 - x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và cũng liên tục trên $[-1, 1]$ nên khả tích trong $\mathbb{R}$. Vì vậy, tập E có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$. Ngoài ra, đoạn thẳng $[-2, 2]$ trên trục Ox cũng có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$. Do đó, ∂D là hội của những tập này cũng có diện tích không nên miền D có diện tích trong $\mathbb{R}^2$.

(b) Vì giá trị của f nằm trong tập $\{-\pi, \pi\}$ nên f bị chặn. Ta thấy $f(x, y) = -\pi$ trên $D \backslash E$ nên f liên tục trên D trừ ra tập E có diện tích không. Vì vậy, hàm f khả tích trên D.

Đặt $g(x, y) = -\pi$ trên D. Ta có $g = f$ trên $D \backslash E$. Vì E là tập có diện tích không nên ta tính được:

$$\int_D f = \int_D g = \int_D (-\pi) = -\pi |D| = -\pi \cdot 2\pi = -2\pi^2.$$



Công thức Fubini cho miền 3 chiều và tính thể tích bằng phương pháp cắt lớp

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 30 tháng 10 năm 2025

Nhắc lại: Mệnh đề 4.5

Cho miền đơn giản theo chiều đứng

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Giả sử f, g, và h liên tục. Khi đó,

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tương tự, nếu ta có miền đơn giản theo chiều ngang

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

với f, g, và h liên tục, thì ta có:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Ví dụ: diện tích miền nằm giữa hai đồ thị

Tính diện tích của miền nằm giữa đồ thị của $g(x)$ *và* $h(x)$ *với* $g \leq h$ *và* $x \in [a, b]$.

Gọi D là miền cần tính diện tích, và ta có thể biểu diễn D là đơn giản theo chiều đứng:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Áp dụng công thức diện tích cho miền, chọn $f \equiv 1$, ta có:

$$\iint_D 1 \,\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} 1 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b [h(x) - g(x)] \,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Ghi chú: Nếu $g = 0$ thì diện tích bên dưới đồ thị của hàm liên tục h là $\int_a^b h(x) \,\mathrm{d}x$.

Ví dụ: diện tích của miền bao bởi đường tròn

Tính diện tích hình tròn D cho bởi phương trình $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Hình tròn D được bao bởi đồ thị $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ và $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ với $-R \leq x \leq R$, nghĩa là

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}.$$

Ta chọn $f = 1$ để tính diện tích:

$$|D| = \iint_D 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Đổi biến $x = R \sin t$, $\mathrm{d}x = R \cos t \, \mathrm{d}t$, tích phân trên trở thành

$$|D| = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi R^2.$$

Do đó, diện tích hình tròn bán kính R là πR^2. 

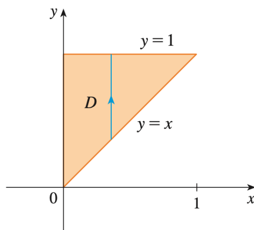
Đổi thứ tự tính tích phân 2 lớp

Ví dụ: Tính tích phân lặp $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$.

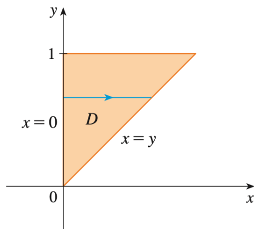
Nếu ta giữ nguyên thứ tự lấy tích phân thì ta gặp khó khăn trong việc tính tích phân $\int_x^1 \sin(y^2)\, \mathrm{d}y$ vì nguyên hàm của $\sin(y^2)$ không phải là hàm sơ cấp. Do đó, ta thử thay đổi thứ tự lấy tích phân.

Nếu ta viết tích phân đã cho thành tích phân lặp $\iint_D \sin(y^2)\, \mathrm{d}A$, với

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 1\}.$$



Hình: Miền D đơn giản theo chiều đứng.



Hình: Miền D đơn giản theo chiều ngang.

Miền D được biểu diễn theo chiều ngang:

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}\,.$$

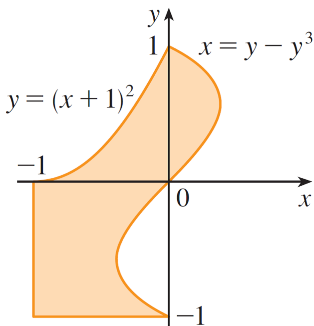
Ta tính tích phân:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sin\left(y^2\right)\, \mathrm{d}A &= \int_0^1 \int_0^y \sin\left(y^2\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[x \sin\left(y^2\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y \sin\left(y^2\right)\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1 - \cos 1}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Ghi chú

Nếu miền không đơn giản, ta có thể tìm cách chia miền thành những phần đơn giản để tính.

Ví dụ:



Hãy biểu diễn D là hợp các miền đơn giản theo chiều ngang hoặc chiều dọc rồi tính tích phân:

$$\iint_D y \, \mathrm{d}A$$

Ta tách $D = D_1 \cup D_2$, với

$$D_1 = \left\{(x, y) \in D \mid 0 \le y \le 1 \wedge \sqrt{y} - 1 \le x \le y - y^3\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in D \mid -1 \le y \le 0 \wedge -1 \le x \le y - y^3\right\}.$$

Ta tính tích phân trên 2 vùng:

$$\iint\limits_{D_1} y\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{7}{30}$$

và

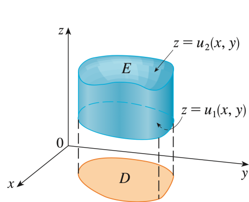
$$\iint\limits_{D_2} y\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^0 \int_{-1}^{y-y^3} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{11}{30}.$$

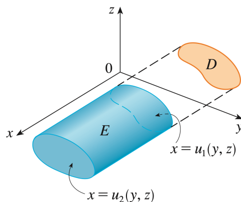
Do đó, tích phân đã cho là:

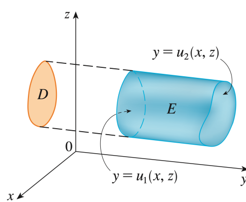
$$\iint\limits_{D} y\,\mathrm{d}A = \iint\limits_{D_1} y\,\mathrm{d}A + \iint\limits_{D_2} y\,\mathrm{d}A = -\frac{4}{30}.$$



Công thức Fubini cho miền ba chiều







Một tập con của $\mathbb{R}^3$ được gọi là một miền đơn giản theo chiều trục z nếu nó có dạng

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\}.$$

Đây là miền nằm giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng cùng phương với trục z nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng.

Tương tự có khái niệm miền đơn giản theo chiều trục x và trục y *(đơn giản theo chiều trục nào thì chiếu lên mặt phẳng vuông góc với trục đó để tìm miền D).*

Mệnh đề 4.8 (miền đơn giản theo trục z)

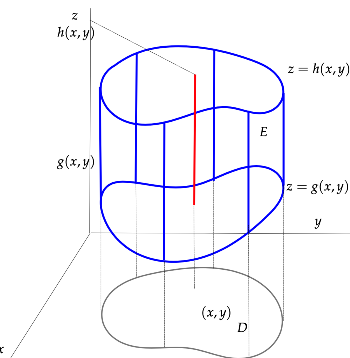
Cho miền $D \subset \mathbb{R}^2$ có diện tích và miền

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\, g(x, y) \le z \le h(x, y)\}.$$

Giả sử f, g, và h bị chặn và liên tục. Khi đó,

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Chứng minh



Ta trước hết chứng minh tập E có thể tích. Vì g và h bị chặn trên D, nên tập E bị chặn. Do đó, ta cần chứng minh ∂E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$.

Ta thấy ∂E là hội của đồ thị của g và h, miền D, và mặt "bên hông" của E:

$$H := \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial D, \\ g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}.$$

Ta cũng biết rằng đồ thị của g và h, và miền D đều có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Vì vậy, ta cần kiểm tra xem H có thể tích không hay không bằng định nghĩa.

Ta đặt D trong một hình chữ nhật $I \subset \mathbb{R}^2$. Như vậy, tồn tại $[a, b]$ sao cho hình hộp $I \times [a, b] \supset E$. Ngoài ra, $H \subset \partial D \times [a, b]$.

Vì ∂D có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$ nên với $\epsilon > 0$ cho trước, ta có thể phủ ∂D bằng hữu hạn các hình chữ nhật với tổng diện tích nhỏ hơn ϵ.

Lấy tích của mỗi hình chữ nhật đó với khoảng $[a, b]$ ta được một phủ của $\partial D \times [a, b]$ bởi các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn $\epsilon(b - a)$. Vậy mặt bên hông H của E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$, nên E có thể tích.

Đặt F là mở rộng của f lên $I \times [a,b]$ sao cho F bằng 0 ngoài E.

- Nếu $(x,y) \notin D$ thì F có giá trị 0 trên $\{(x,y)\} \times [a,b]$.
- Nếu $(x,y) \in D$ thì $\int_a^b F(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$.

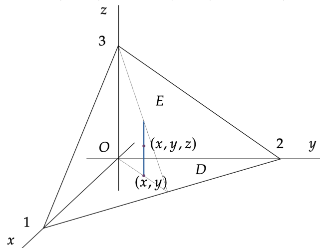
Áp dụng công thức Fubini cho F, ta có

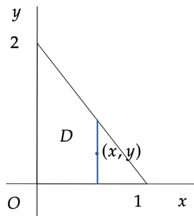
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{I\times[a,b]} F(x,y,z)\,\mathrm{d}V &= \iint\limits_{I} \left(\int_a^b F(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}A \\ &= \iint\limits_{D} \left(\int_a^b F(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}A \\ &= \iint\limits_{D} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Đây là điều cần chứng minh. 

Ví dụ

Tính tích phân $\iiint\limits_E x\,\mathrm{d}V$ *với* E *là khối tứ diện với các đỉnh* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.





Ta xem E là một khối đơn giản theo chiều trục z, là miền bên dưới mặt phẳng (P) qua ba điểm $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ và bên trên tam giác OAB trong mặt phẳng Oxy.

Trước hết, ta viết phương trình mặt phẳng của (P):

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=3-3x-\frac{3}{2}y.$$

Ta xem $\triangle OAB$ như là một miền đơn giản theo chiều trục y trong mặt phẳng Oxy, nên ta có miêu tả:

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2 - 2x,\, 0 \le z \le 3 - 3x - \frac{3}{2}y \right\}.$$

Áp dụng công thức Fubini, ta tính

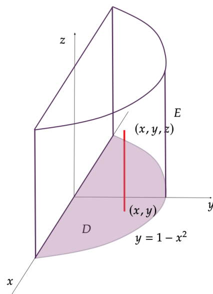
$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E x \, \mathrm{d}V &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} x \, \mathrm{d}z \right) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x \left(3 - 3x - \frac{3}{2}y \right) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x(3-3x)y - \frac{3}{4}xy^2 \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2-2x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$



Ví dụ

Cho $E \subset \mathbb{R}^3$ *là khối được bao bởi các mặt* $z = 0$, $z = 2$, $y = 0$, $y = 1 - x^2$. *Tính tích phân*

$$\iiint_E y \, \mathrm{d}V.$$



Ta hình dung E là một khối đơn giản theo chiều trục y:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2, \, -1 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1 - x^2\}.$$

Áp dụng công thức Fubini, ta tính:

$$\iiint_E y\,\mathrm{d}V = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \bigg|_{y=0}^{y=1-x^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - 2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{16}{15}\,\mathrm{d}z = \frac{16}{15}.$$

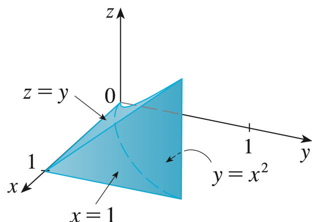


Ghi chú: Miền E có thể được miêu tả đơn giản theo chiều trục z:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Ví dụ: đổi thứ tự tích phân 3 lớp

Cho f là hàm liên tục, hãy viết lại tích phân $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ *theo thứ tự* $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$.

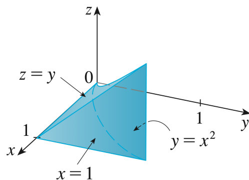


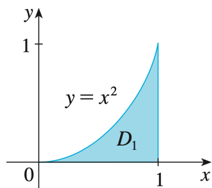
Tích phân đã cho có thể được viết lại thành

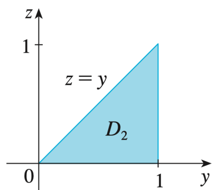
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iiint_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}V,$$

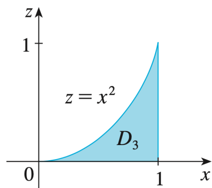
với khối E được miêu tả bởi

$$E = \left\{(x,y,z) \,|\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x^2,\, 0 \le z \le y\right\}.$$









Ta chiếu khối E lên các mặt phẳng tọa độ để được:

- trên mặt phẳng xy:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x^2\} \\ &= \{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1,\, \sqrt{y} \le x \le 1\}, \end{aligned}$$

- trên mặt phẳng yz:

$$D_2 = \{(y,z)\,|\,0 \le y \le 1,\, 0 \le z \le y\},$$

- trên mặt phẳng xz:

$$D_3 = \{(x,z)\,|\,0 \le x \le 1,\, 0 \le z \le x^2\}.$$

Khi lấy tích phân theo x, rồi đến z, rồi đến y thì E có thể được miêu tả là (đơn giản theo trục x):

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y,\ \sqrt{y} \le x \le 1\},$$

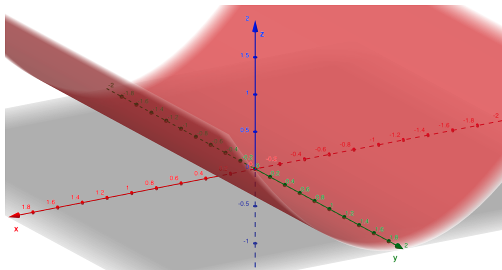
nên ta được

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y.$$



Ví dụ

Cho f là hàm liên tục, hãy viết lại tích phân $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ *theo 5 tích phân lặp với những thứ tự khác.*



Tích phân ban đầu trở thành:

$$(z \text{ trước }) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(y \text{ trước }) = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

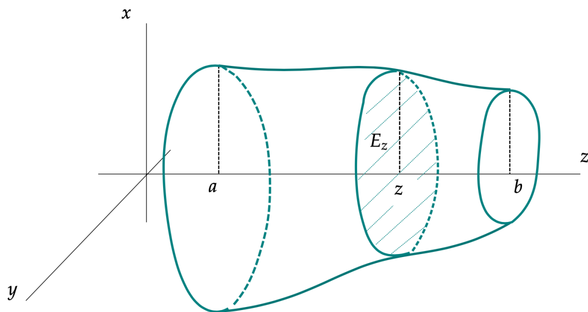
$$(x \text{ trước }) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \square$$

Phương pháp cắt lớp

Giả sử tập $E \subset \mathbb{R}^3$ có thể tích. Giả sử $a \leq z \leq b$ với mọi $(x, y, z) \in E$. Giả sử với mỗi $z \in [a, b]$, tập

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in E\}$$

có diện tích. Tập E_z là một mặt cắt (thiết diện, cross section) của khối E bởi mặt phẳng vuông góc trục z tại tọa độ z.



Đặt E vào trong một hình hộp $I \times [a, b]$ với I là một hình chữ nhật trong $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức Fubini cho hình hộp $I \times [a, b]$ và hàm χ_E, ta được

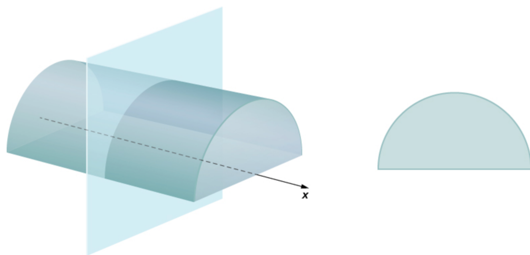
$$\begin{aligned}
|E| &= \iiint\limits_{I \times [a,b]} \chi_E \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{[a,b]} \left(\iint\limits_{I} \chi_E(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{[a,b]} \left(\iint\limits_{I} \chi_{E_z}(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_a^b |E_z| \, \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có công thức thể tích của khối bằng tích phân của diện tích mặt cắt:

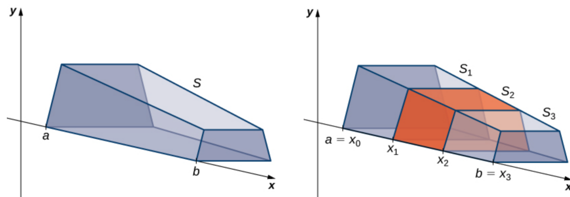
$$|E| = \int_a^b |E_z| \, \mathrm{d}z.$$

Đây được gọi là *phương pháp cắt lớp* (slicing method).

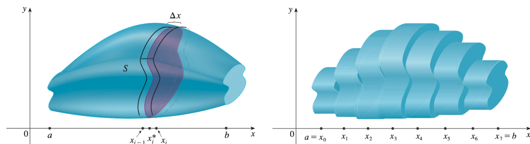
Vài hình ảnh của khối với phần cắt lớp



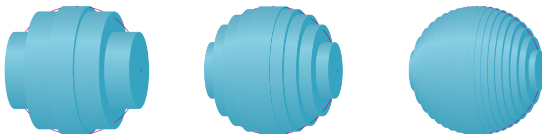
Hình: Khối hình trụ có diện tích mặt cắt không đổi.



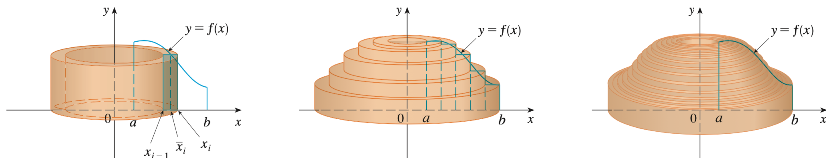
Hình: Khối có diện tích mặt cắt thay đổi.



Hình: Khối có diện tích mặt cắt phụ thuộc vào vị trí mặt cắt tại x.



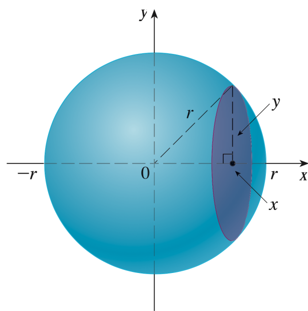
Hình: Khối có mặt cắt là đĩa tròn.



Hình: Khối có mặt cắt là mặt trụ.

Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, hãy tìm công thức thể tích của quả cầu trong $\mathbb{R}^3$ *bán kính* r.



Mỗi mặt cắt của quả cầu với mặt phẳng vuông góc trục x là một hình tròn tâm trên trục x và bán kính là $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, nên mặt tròn xoay này gồm những điểm (x, y, z) thỏa:

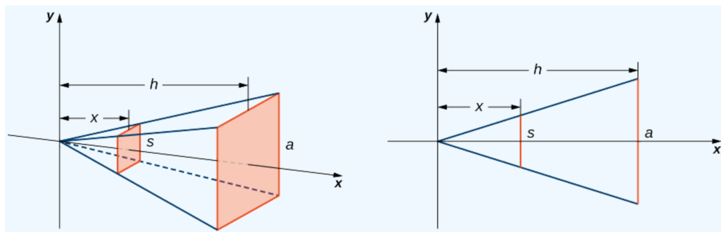
$$-r \leq x \leq r \quad \text{và} \quad y^2 + z^2 = f(x)^2 = r^2 - x^2.$$

Ta tính thể tích là:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi r^3}{3}. \qquad \square$$

Ví dụ

Tìm thể tích của một khối hình kim tự tháp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h.



Ta thiết lập trục tọa độ như hình. Vì đáy là một hình vuông nên mặt cắt cũng là một hình vuông. Gọi s là chiều dài cạnh hình vuông này. Áp dụng tỉ số tam giác đồng dạng, ta có:

$$\frac{s}{a} = \frac{x}{h},$$

nên $s = \frac{ax}{h}$.

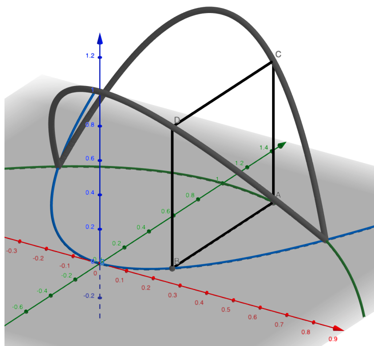
Vì diện tích mặt cắt là $A(s) = s^2 = \frac{a^2x^2}{h^2}$, nên thể tích cần tìm là:

$$\int_0^h A(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^2h \text{ (đơn vị thể tích).}$$



Ví dụ

Tìm thể tích của khối trong $\mathbb{R}^3$, trong đó đáy là miền nằm trong mặt phẳng xy, bị chặn bởi đồ thị của $y = 3x^2$, $y = 1 - x^2$; và thiết diện là các hình vuông vuông góc với trục x và mặt đáy.



Giao điểm của $y = 3x^2$ và $y = 1 - x^2$ thỏa $3x^2 = 1 - x^2$, nghĩa là $x = \pm\frac{1}{2}$.

Với thiết diện tại vị trí x, chiều dài cạnh là:

$$1 - x^2 - 3x^2 = 1 - 4x^2.$$

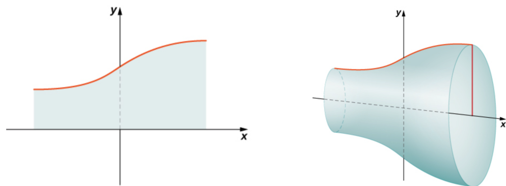
Thể tích của khối cần tìm là:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)^2 \, dx = \frac{8}{15} \text{ (đơn vị thể tích).}$$



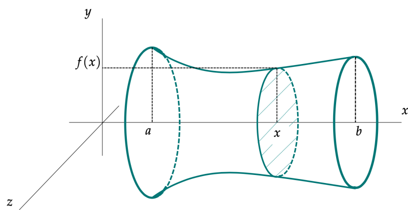
Ví dụ: thể tích khối tròn xoay

Cho f là hàm *liên tục* trên khoảng $[a, b]$ và $f(x) > 0$ trên $[a, b]$. Xét khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của f quanh trục x (solid of revolution).



Khối này có biên gồm hai hình tròn và một mặt tròn xoay. Mỗi mặt cắt của mặt tròn xoay này với mặt phẳng vuông góc trục x là một hình tròn tâm trên trục x và bán kính là $f(x)$, vậy mặt tròn xoay này gồm những điểm (x, y, z) thỏa

$$a \leq x \leq b \qquad \text{và} \qquad y^2 + z^2 = f(x)^2.$$



Ta xem đây là hội của hai đồ thị của hai hàm liên tục $z = \pm\sqrt{f(x)^2 - y^2}$ trên miền $a \leq x \leq b$, $|y| \leq f(x)$. Từ đó, ta kết luận biên của khối tròn xoay có thể tích không, nên khối tròn xoay có thể tích.

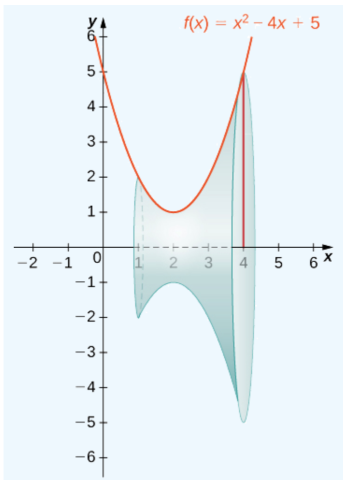
Ta áp dụng phương pháp cắt lớp để tính thể tích khối tròn xoay này. Vì mỗi mặt cắt tại x là một hình tròn có bán kính $f(x)$ và diện tích là $\pi[f(x)]^2$, nên thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của f quanh trục x bằng:

$$\int_a^b \pi[f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Một cách tương tự, ta cũng có thể tính được thể tích của khối tròn xoay quanh trục y.

Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, tính thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền phẳng bị chặn bởi đồ thị của $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 1$, *và* $x = 4$ *quanh trục* x.



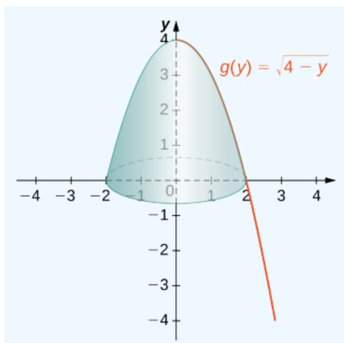
Bằng phương pháp cắt lớp, ta chọn thiết diện là mặt cắt vuông góc với trục x tại mỗi giá trị x. Đây là khối tròn xoay, nên thiết diện là những hình tròn (disk method) với bán kính $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ứng với mỗi x.

Vì $A(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi(x^2 - 4x + 5)^2$, nên

$$V = \pi \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)^2 \, dx = \frac{78\pi}{5}. \quad \square$$

Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, tính thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền phẳng bị chặn bởi đồ thị của $x = \sqrt{4-y}$, $x = 0$, *và* $y = 0$ *quanh trục* y.



Bằng phương pháp cắt lớp, ta chọn thiết diện là mặt cắt vuông góc với trục y tại mỗi giá trị y. Đây là khối tròn xoay, nên thiết diện là những hình tròn với bán kính $g(y) = \sqrt{4-y}$ ứng với mỗi y.

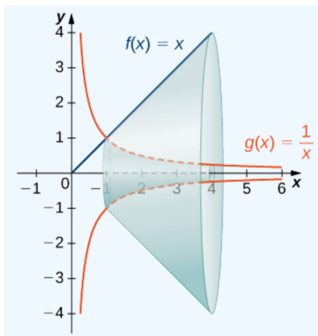
Vì $A(y) = \pi[g(y)]^2 = \pi(4-y)$, nên

$$V = \pi \int_0^4 (4-y)\,\mathrm{d}y = 8\pi.$$



Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, tính thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền phẳng nằm giữa đồ thị của $y = x$, $xy = 1$ *với* $1 \leq x \leq 4$ *quanh trục* x.

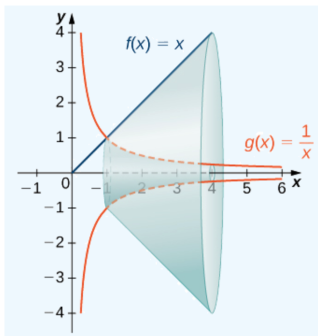


Bằng phương pháp cắt lớp, ta chọn thiết diện là mặt cắt vuông góc với trục x tại mỗi giá trị x.

Đây là khối tròn xoay, nên thiết diện là những hình vành khăn (washer method).

Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, tính thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền phẳng nằm giữa đồ thị của $y = x$, $xy = 1$ với $1 \leq x \leq 4$ quanh trục x.



Sử dụng diện tích hình vành khăn bằng diện tích hình tròn lớn trừ diện tích hình tròn nhỏ, ta thấy:

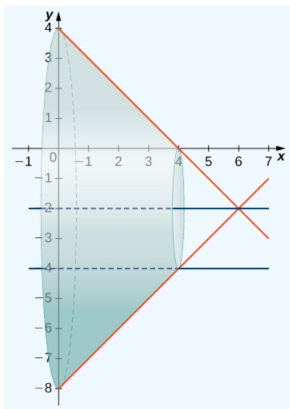
- bán kính hình tròn lớn: $f(x) = x$;
- bán kính hình tròn nhỏ: $g(x) = \frac{1}{x}$.

Vì vậy, ta có:

$$V = \pi \int_1^4 \left[x^2 - \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x = \frac{81\pi}{4}. \qquad \square$$

Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, tính thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền phẳng nằm giữa đồ thị của $y = 4 - x$*, trục* x *với* $0 \leq x \leq 4$ *quanh trục* $y = -2$*.*

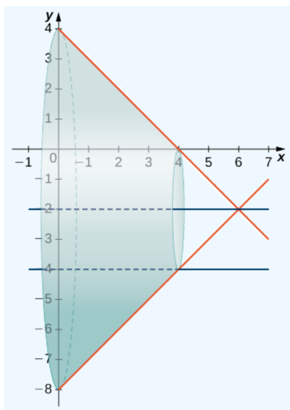


Bằng phương pháp cắt lớp, ta chọn thiết diện là mặt cắt vuông góc với trục $y = -2$ tại mỗi giá trị x.

Đây là khối tròn xoay, nên thiết diện là những hình vành khăn.

Ví dụ

Dùng phương pháp cắt lớp, tính thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền phẳng nằm giữa đồ thị của $y = 4 - x$*, trục* x *với* $0 \leq x \leq 4$ *quanh trục* $y = -2$.



Sử dụng diện tích hình vành khăn bằng diện tích hình tròn lớn trừ diện tích hình tròn nhỏ, ta thấy:

- bán kính hình tròn lớn: $4 - x - (-2) = 6 - x$;
- bán kính hình tròn nhỏ: $0 - (-2) = 2$.

Vì vậy, ta có:

$$V = \pi \int_0^4 \left[(6 - x)^2 - 4 \right] \, \mathrm{d}x = \frac{160\pi}{3}. \qquad \square$$